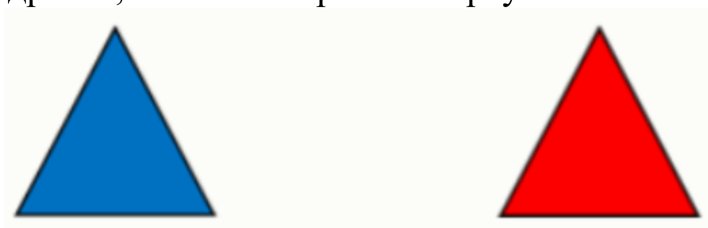
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 6 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. В ряд выложены квадраты и треугольники. Треугольника всего два — синий и красный. Оказалось, что справа от синего треугольника находятся красный треугольник и 7 квадратов, а слева от красного треугольника — 12 квадратов.



Сколько квадратов между треугольниками, если всего выложено 17 фигур?
Ответ: 4.
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.
В ряд выложены 17 фигур, две из них — треугольники. Значит, квадратов всего 17 – 2 = 15. Семь из них расположены правее синего треугольника, а остальные 8 левее него. Слева от красного треугольника 12 квадратов. Значит, между треугольниками 12 – 8 = 4 квадрата.

2. Футбольный матч закончился 5 : 1. Каждый гол в этом матче был устроен так: один игрок давал голевой пас своему сокомандику, а тот забивал гол команде соперников.
После каждого гола в протокол матча записывали имена двух игроков из одной команды: того, кто забил гол, и того, кто отдал голевой пас. По итогу матча в протоколе оказались записаны имена только четырёх игроков: Андрея, Бориса, Вадима и Дениса. Сколько забил голов и сколько отдал голевых передач Денис, если известно, что его сокомандник Андрей забил ровно 2 гола?
Ответ: голы — 3, голевые передачи — 2.
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение. За каждую команду должны играть хотя бы двое из четверых упомянутых ребят, так как каждая команда забила хотя бы 1 гол (то есть кто-то отдал голевой пас, а кто-то этот гол забил). Но так как ребят всего четверо, то ровно двое из них играют за одну команду, и ровно двое — за другую.
Из условия задачи мы знаем, что Андрей и Денис играют за одну команду. Так как Андрей забил 2 гола, то эти ребята играют за команду, забившую 5 голов.

Получается, что Денис забил 3 оставшихся гола и отдал 2 голевых передачи Андрею.

3. В большой кроличьей семье есть дети: кролики и крольчихи. У каждого кролика братьев в 2 раза больше, чем сестёр. А у каждой крольчихи сестёр на 6 меньше, чем братьев. Сколько всего детей в этой семье?

Ответ: 13.

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение. Пусть у одного кролика x сестёр, то есть всего x крольчих. Тогда братьев у него ровно $2x$, поэтому всего кроликов ровно $2x + 1$ (включая его самого).
Теперь рассмотрим крольчиху: у неё $x - 1$ сестёр и $2x + 1$ братьев. По условию мы знаем, что первая величина на 6 меньше, чем вторая. Получаем и решаем соответствующее уравнение:

$$(x - 1) + 6 = 2x + 1,$$
$$x + 5 = 2x + 1,$$
$$x = 4.$$

Тогда всего детей в семье кроликов ровно $x + (2x + 1) = 3x + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$.

4. У мальчиков Ильи, Максима, Вовы и Лёши есть конфеты: 1, 2 или 3 у каждого. Они заявили следующее:

- Илья: «У Лёши не 1 конфета».
- Максим: «Ровно у двоих из нас по 3 конфеты».
- Вова: «У меня конфет больше, чем у Лёши».
- Лёша: «Количества конфет у Максима и Вовы отличаются не более чем на 1».

Известно, что соврал только один мальчик, и он — единственный, у кого 1 конфета. У кого сколько конфет?

Ответ: Илья — 3, Максим — 2, Вова — 1, Лёша — 3.

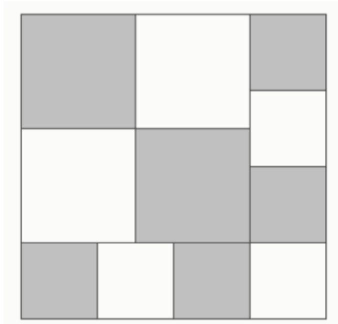
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение. Предположим, что 1 конфета у Ильи. Тогда, сказав, что у Лёши не 1 конфета, он соврал, поэтому у Лёши тоже 1 конфета. Противоречие.
Получается, что у Ильи 2 или 3 конфеты, и он говорит правду. Тогда и у Лёши 2 или 3 конфеты, и он тоже говорит правду. По условию задачи только у одного мальчика ровно 1 конфета, поэтому может быть два варианта (тут мы также пользуемся верным утверждением Лёши):

- у Максима 1 конфета, а у Вовы 2 конфеты,
- у Максима 2 конфеты, а у Вовы 1 конфета.

То есть у Вовы 1 или 2 конфеты, а у Лёши 2 или 3 конфеты, поэтому Вова точно соврал.
Теперь мы точно понимаем, что у Максима 2 конфеты, а у Вовы 1 конфета. Тогда Максим говорит правду, и среди ребят ровно у двоих по 3 конфеты. Отсюда можно сделать вывод, что эти двое — Илья и Лёша.

5. Квадрат на рисунке разбит на 11 меньших квадратов: белых и серых. Суммарная площадь серых квадратов равна 102.



Чему равна суммарная площадь белых квадратов?
Ответ: 90.
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение. На рисунке изображены 2 больших и 4 маленьких серых квадрата, а также 2 больших и 3 маленьких белых квадрата. Очевидно, что все большие квадраты равны друг другу (т. е. имеют одинаковые стороны), и все маленькие квадраты тоже равны друг другу. Поэтому для решения задачи достаточно найти разность серой и белой площади — площадь маленького квадрата.
Пусть сторона маленького квадрата равна x. На рисунке видно, что две стороны большого квадрата суммарно равны по длине трём сторонам маленького квадрата (т. е. равны $3x$).

Значит, сторона большого квадрата равна $\frac{3}{2}x$.

Суммарная площадь двух больших и четырёх маленьких серых квадратов равна

$$2\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^2+4x^2$$

а по условию это равно 102. Получаем равенство

$$2\cdot\left(\frac{3x}{2}\right)^2+4x^2=102$$

$$8{,}5x^2=102$$

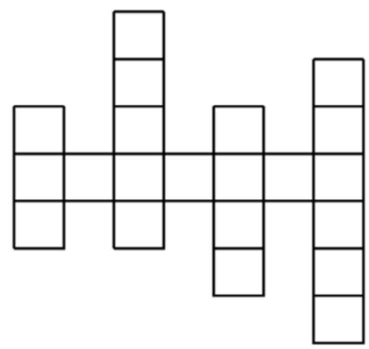
$$x^2=12$$

Таким образом, мы нашли разность серой и белой площади. Значит, ответом к задаче является число $102 - 12 = 90$.

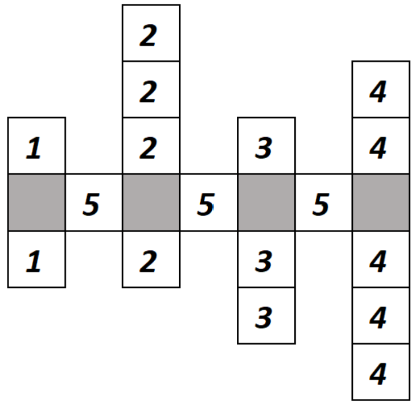
6. По обе стороны дороги стоят столбы так, что расстояние между первым и последним столбами с каждой стороны равно 37 км. С левой стороны стоит 117 столбов, и расстояние между соседними столбами одинаковое. С правой стороны расстояние между соседними столбами тоже одинаковое, но оно на треть больше, чем с левой. Сколько всего столбов стоит справа?
Ответ: 88.

Решение. С левой стороны стоит 117 столбов, между ними есть 116 одинаковых промежутков. Значит, длина одного промежутка между двумя соседними столбами с левой стороны равняется $\frac{37}{116}$ км.
С правой стороны расстояние между соседними столбами на треть больше, поэтому оно равняется $\frac{37}{116} \cdot \frac{4}{3} = \frac{37}{87}$ км. Значит, с правой стороны 87 промежутков и, соответственно, 88 столбов.

7. На рисунке изображена клетчатая доска. Будем считать, что фишка на этой доске *видит* другую фишку, если они расположены либо в одной вертикали, либо в одной горизонтали, причём между ними нет границ доски.
Сколькими способами можно расставить 5 фишек на этой доске так, чтобы никакие две из них не *видели* друг друга?
Ответ: 360.



Решение. Доска состоит из пяти линий: четырёх вертикалей и одной горизонтали. Заметим, что в каждой из них может стоять не более одной фишки, но так как фишек ровно 5 и линий ровно 5, то в каждой линии должна быть ровно одна фишка.
Никакая фишка не может стоять в пересечении двух линий, так как иначе фишек было бы меньше 5. Такие клетки покрасим серым цветом. Тогда
• первую фишку можно поставить в одну из 2 клеток с номером 1;
• вторую фишку можно поставить в одну из 4 клеток с номером 2;
• третью фишку можно поставить в одну из 3 клеток с номером 3;
• четвёртую фишку можно поставить в одну из 5 клеток с номером 4;
• пятую фишку можно поставить в одну из 3 клеток с номером 5.



Таких расстановок ровно $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 360$. Очевидно, что все они удовлетворяют условию.

8. Андрей, Боря, Вера, Галя, Денис и Елена решили сыграть в настольную игру. Они разбились на три команды, каждая из которых состоит из мальчика и девочки. Цель игры — получить как можно больше очков.
К концу игры все дети суммарно набрали 151 очко, причём в каждой команде девочка набрала на 5 очков больше, чем мальчик. При этом если к числу очков Андрея прибавить число очков Гали, то получится 52, а если прибавить число очков Веры, то получится 48. Известно, что каждый из детей набрал целое число очков. Сколько очков набрала Елена? (Каждый из детей набрал целое число очков.)
Ответ: 27.

Решение. Пусть Андрей набрал А очков, Боря — Б очков, Вера — В очков, Галя — Г очков, Денис — Д очков, Елена — Е очков.
По условию задачи девочка, которая была в одной команде с Андреем, набрала А+5 очков. Тогда вместе они набрали 2А + 5 очков, что не может равняться 48 или 52 из-за чётности. Значит, Андрей был в одной команде с Еленой.
Заметим, что Елена набрала на 5 очков больше, чем Андрей, поэтому Е + Г = А + 5 + Г = 52+5 = 57 очков. Тогда нетрудно вычислить, сколько очков набрали Боря и Денис в сумме.

$$Б + Д = 151 - А - В - Г - Е = 151 - (Е + Г) - (А + В) = 151 - 57 - 48 = 46.$$

Теперь можно посчитать, сколько в сумме набрали Вера и Галя.

$$В + Г = (Б + 5) + (Д + 5) = 46 + 10 = 56.$$

Осталось вычислить, сколько очков набрал Андрей.

$$2А = (А + В) + (А + Г) - (В + Г) = 48 + 52 - 56,$$
$$2А = 44,$$
$$А = 22.$$

Таким образом, Елена набрала 22 + 5 = 27 очков.